International Journal of Information Science and Technological Applications-UAS
IJISTA
ISSN (en trámite)
https://revistas.uas.edu.mx/index.php/IJISTA

Noviembre 2025
Vol.1.
Número. 2

Derivación bajo el signo integral: En busca de aplicaciones para el truco de Feynman

Differentiation under the Integral Sign: In Search of Applications for Feynman's Trick

Emmanuel Roberto Estrada Aguayo

Facultad de Informática Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa, México
Email: emmanuel.estrada@uas.edu.mx **ORCID:** 0000-0001-6914-0739

Recibido: octubre 2025, **Aceptado:** octubre 2025, **Publicado:** noviembre 2025

Resumen:

El método de derivación bajo el signo integral, popularizado por Richard Feynman, constituye una técnica poderosa para la evaluación de integrales definidas complejas que son resistentes a métodos convencionales. Este trabajo demuestra la aplicabilidad y elegancia de este método mediante un caso de estudio fundamental en probabilidad y estadística: la demostración de que la función de densidad de la distribución normal está correctamente normalizada. Se presenta una comparación directa con el método clásico de integración en coordenadas polares, la simplificación conceptual y operativa que ofrece el truco de Feynman. El análisis concluye que esta técnica no solo es una herramienta eficaz para la resolución de problemas específicos, sino que también fomenta una comprensión más profunda de la interacción entre el cálculo integral y diferencial.

Palabras Clave:

Integración, Truco de Feynman, Derivación Bajo la Integral, Distribución Normal, Métodos de Cálculo.

Abstract:

The method of differentiation under the integral sign, popularized by Richard Feynman, is a powerful technique for evaluating complex definite integrals that are resistant to conventional methods. This work demonstrates the applicability and elegance of this method through a fundamental case study in statistics and physics: proving that the probability density function of the normal distribution is correctly normalized. A direct comparison with the classical method of integration using polar coordinates is presented, highlighting the conceptual and operational simplification offered by Feynman's trick. The analysis concludes that this technique is not only an effective tool for solving specific problems but also fosters a deeper understanding of the interaction between integral and differential calculus.

Keywords :

Integration, Feynman Trick, Differentiation Under Integral, Normal Distribution, Calculation Methods.

1. Introducción

La evaluación de integrales definidas es una piedra angular en matemáticas. Si bien existen técnicas estándar como la integración por partes o los cambios de variable, muchas integrales desafían estos enfoques, requiriendo métodos más sofisticados e ingeniosos. De entre toda la gama de funciones que pueden ser integradas, son las integrales gaussianas y sus variantes los objetos centrales que nos lleva a la discusión del presente artículo. La normalización de la densidad gaussiana, y en particular la evaluación explícita de integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

para

$$a > 0,$$

aparece de manera recurrente en teoría de probabilidades, teoría cuántica de campos, estadística matemática y otros campos de interés formal. Más allá de su importancia práctica, la integral gaussiana es un ejemplo pedagógicamente valioso: permite ilustrar técnicas analíticas diversas —cambio a coordenadas polares, argumentos en varias dimensiones y el método conocido coloquialmente como **"derivación bajo el signo integral"**. Aunque conocida desde el siglo XVIII, de hecho, se le denomina "Regla de Leibniz" [1], fue divulgada y popularizada por el premio Nobel Richard Feynman. Este método consiste en introducir un parámetro auxiliar en el integrando, transformar la integral en una función de dicho parámetro y luego diferenciar con respecto a él para obtener una expresión más manejable. A pesar de la aparente simplicidad del resultado final, la riqueza didáctica radica en las distintas rutas de obtención y en las condiciones de validez de las mismas. La técnica que utiliza coordenadas polares explota la simetría radial de la función en $\mathbb{R}^2$ y conduce a un cálculo directo y geométrico; por su parte, la derivación bajo el signo integral es más flexible para introducir parámetros y generalizaciones funcionales, siendo especialmente valiosa cuando se desea estudiar dependencias respecto de parámetros. El presente artículo tiene como objetivo demostrar su potencia esta técnica y mediante su aplicación a un problema de fundamental importancia: la normalización de la distribución de probabilidad Gaussiana.

Conjuntamente se exponen los pasos técnicos y las ecuaciones analíticas necesarias también se ofrece una propuesta de algoritmo de cálculo analítico que puede dar píe a futuros trabajos de implementación computacional en lenguajes de programación que puedan verificar numéricamente la normalización para distintos valores de parámetros de la distribución, así como otras aplicaciones. Las contribuciones concretas de este artículo son:

1. Presentación pulida y comparativa de una demostración clásica con el truco mencionado para la integral de distribución gaussiana, adaptadas a un discurso pedagógico claro.
2. Propuesta algorítmica de cálculo que complementa el desarrollo analítico y evidencia la aplicabilidad práctica de las fórmulas presentadas.

El presente artículo tiene como objetivo demostrar la potencia de esta técnica mediante su aplicación a un problema de fundamental importancia: la normalización de la distribución de probabilidad Gaussiana además de analizar sus ventajas pedagógicas y prácticas.

2. Trabajos Relacionados

La literatura sobre la derivación bajo el signo integral (conocida también como "truco de Feynman" o la fórmula de Leibniz en su forma aplicada) abunda en varias líneas, aunque esta técnica es de origen antiguo, ha sido objeto de estudio y aplicación en diversos contextos matemáticos y pedagógicos. Los trabajos relacionados en esta área se centran en la fundamentación teórica, la demostración de teoremas clave y la aplicación a una diversidad de problemas. En particular, la revisión de Sánchez Muñoz y Sempere Valdés [1] proporciona un tratamiento accesible y riguroso de los teoremas necesarios que ofrecen una fundamentación teórica rigurosa del método. Partiendo desde el Teorema de Leibniz y sus generalizaciones, su trabajo se destaca por presentar una colección de ejemplos aplicados que ilustran la potencia de la técnica para resolver integrales definidas sin primitiva elemental, tales como:

$$\int \ln(\mathrm{a} + \mathrm{b}\ \cos x)\mathrm{dx}$$

y también:

$$\int \cos x \cdot e^{-x^2} dx$$

Además, ese mismo trabajo recoge referencias clásicas y artículos técnicos por ejemplo el trabajo de Flandes y el trabajo de Talvila [2], [3] los cuales examinan condiciones necesarias y suficientes en distintos marcos.

Por otro lado, Ariza García et al. [4] profundizan en el marco teórico, demostrando formalmente dos versiones de la Fórmula de Leibniz y proponiendo una sección de implementación pedagógica. Su artículo enfatiza la utilidad de la técnica en problemas considerados complejos, complementando la teoría con un apéndice de soluciones formales que asegura el rigor matemático.

Ambos trabajos coinciden en señalar la escasez de material de calidad en español sobre el tema, por lo tanto, la presente propuesta busca contribuir en la divulgación rigurosa del truco en la comunidad académica en general.

Además de la literatura formal, existen recursos en línea que abordan el tema desde un enfoque más accesible y aplicado. Por un lado, tenemos el blog "Demostración Py" [5] el cual presenta una explicación didáctica del "artificio de Feynman", guiando al lector a través de ejemplos con un lenguaje claro y centrado en la práctica computacional. De manera similar, el recurso web "Zackyzz" [6] ofrece una recopilación concisa de problemas resueltos, funcionando como una caja de herramientas para estudiantes que se enfrentan por primera vez a la técnica. Estos recursos, si bien carecen de la rigurosidad de las publicaciones académicas, son recursos didácticos muy valiosos y útiles para comprender la aplicabilidad inmediata del método.

La literatura revisada muestra dos tendencias claras: (i) tratar la técnica desde el punto de vista formal (teoremas y condiciones) y (ii) presentar listas de problemas-resueltos desde un punto de vista práctico y pedagógico.

Lo que resulta menos frecuente es una comparación sistemática y didáctica entre rutas concretas de cálculo (p. ej. paso a coordenadas polares frente a derivación bajo el signo integral) aplicada a un mismo problema de referencia (la integral gaussiana), acompañada de una verificación numérica sencilla que conecte el razonamiento analítico con la comprobación computacional, es donde situamos la aportación del presente artículo: la demostración de la correcta normalización de la función de densidad de la distribución normal. Esta aplicación sirve como un caso de estudio fundamental en probabilidad y estadística.

Así mismo, el trabajo contribuye al presentar una comparación directa que resalta la simplificación conceptual y operativa que el Artificio de Feynman ofrece frente al método clásico de integración en coordenadas polares.

3. Metodología

El presente artículo se basará en el análisis comparativo para dos demostraciones fundamentales de la normalización de la función de densidad de probabilidad Gaussiana, la cual de aquí en adelante llamaremos “Función de Densidad de Probabilidad de la Distribución Normal” o simplemente “Distribución Normal”. El objetivo es contrastar el método clásico, que utiliza integración doble y cambio de variable, con la aplicación del Truco de Feynman, evaluando la eficiencia conceptual y operativa del método propuesto frente al método clásico de uso común. Con esto se evaluará la eficiencia conceptual y operativa del método propuesto.

3.1. Cálculo del resultado de la Distribución Normal usando métodos convencionales.

La propiedad de normalización establece que la integral de la Distribución Normal en todo su dominio debe ser igual a uno:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 \quad (1)$$

Partiendo de la integral que se desea probar, se realiza el cambio de variable:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), implica reescribir el problema en términos de la integral de Gauss,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (3)$$

demostrando que el problema original es equivalente a probar que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I = 1 \quad (4)$$

Se considera el cuadrado de la integral, I^2, expresándolo como el producto de dos integrales independientes con las variables x y y lo que lleva a la solución de la siguiente integral sobre el plano cartesiano.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \quad (5)$$

Se aplica un cambio de variable a (5) en coordenadas polares

$$x = r cos\theta, y = r sen\theta \quad (6)$$

con lo cual el diferencial de área se transforma en:

$$dxdy = rdrd\theta \quad (7)$$

y los límites de integración se cambian de acuerdo a que

$$0 < r < \infty,$$

$$y$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

por lo tanto, al sustituir (6) y (7) en (5) la integral doble a resolver será

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} rdr \quad (8)$$

de aquí al hacer el cambio de variable

$$u = \tfrac{1}{2}r^2 \text{ con } du = rdr \quad (9)$$

al sustituir (9) en (8) se calcula que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} rdr = 1$$

por lo tanto

$$I^2 = 2\pi$$

lo que lleva a que

$$I = \sqrt{2\pi}$$

resultado que demuestra que de acuerdo a (4)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I = 1$$

que es lo que se quería probar.

3.2. Cálculo de la demostración usando el Truco de Feynman.

El segundo enfoque utiliza la técnica de derivación bajo el signo integral, ofreciendo una perspectiva alternativa [2], [3].

Tras el mismo cambio de variable inicial

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

el problema se reduce a evaluar de nuevo la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Se introduce un parámetro a en el exponente, definiendo la función

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz$$

al hacer el cálculo de la integral a través de métodos mencionados en la sección 3.1 se obtiene el resultado

$$I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

se procede a derivar $I(a)$ con respecto al parámetro a, aplicando la regla de Leibniz o como lo se ha denominado "Truco de Feynman", aplicando dicha regla

$$\frac{d}{da}[I(a)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} e^{-az^2} dz$$

al derivar bajo el signo integral se obtiene

$$\frac{d}{da}[I(a)] = -\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2} dz$$

la solución de la integral al evaluarla será

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} a^{-\frac{3}{2}}$$

evaluando en el parámetro $a = \frac{1}{2}$

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

por lo tanto

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

con este resultado se prueba de nuevo la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I = 1.$$

3.3 Algoritmo de implementación para el truco de Feynman.

Para conectar el desarrollo analítico con una futura comprobación computacional, proponemos el siguiente algoritmo de pasos analíticos,

1. **Definir** $I(\mu)$ como la integral de la función de densidad normal.
2. **Mostrar** que $I(\mu)$ es constante derivando con respecto a μ y verificar que la derivada es cero (ya sea mediante propiedades de la distribución o mediante un cambio de variable).
3. **Evaluar** $I(0)$ utilizando el truco de Feynman con un parámetro auxiliar a para calcular la integral de Gauss.
4. **Concluir** que $I(\mu)=1$ para todo μ.
Este algoritmo puede ser implementado en un futuro código de comprobación numérica que pueda ser implementado en un lenguaje de programación como trabajo derivado de los resultados del presente artículo.

4. Resultados

La aplicación de los dos métodos definidos en la sección de Metodología tiene como objetivo demostrar que la

Función de Densidad propuesta se encuentra correctamente normalizada. Esto se cumple si la integral

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

Proponiendo el método de cambio de variable y también a llegar al resultado

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$$

por medio del truco de Feynman.

Ambos métodos, el clásico y el de Feynman, demuestran de manera concluyente que la Función de Densidad de Probabilidad de la Distribución Normal está correctamente normalizada.

5. Análisis de Resultados

El análisis comparativo de los métodos revela ventajas conceptuales y operativas distintivas para cada enfoque en la demostración de un mismo teorema fundamental.

- El Truco de Feynman demuestra superioridad operativa al reducir el problema a una dimensión, evitando la complejidad del cálculo multivariable y la integración por partes requerida en el método clásico.
- La parametrización empleada en el método Feynman transforma un problema de integración en uno de diferenciación, aprovechando la interacción entre cálculo integral y diferencial de manera particularmente elegante.
- La dualidad demostrativa presenta valor educativo significativo por un lado el método clásico desarrolla intuición geométrica y habilidades en cambio de variables. El método Feynman fomenta pensamiento lateral y aplicación creativa de herramientas de cálculo. La coexistencia de ambos enfoques enriquece la comprensión de la naturaleza del teorema

Este caso de estudio subraya que la Derivación bajo el Signo Integral no solo es útil para resolver integrales complejas, sino que también sirve como un atajo poderoso para evaluar identidades conocidas en el cálculo, fomentando una comprensión más profunda de la interacción entre las ramas diferencial e integral de las matemáticas.

6. Conclusiones

La comparación entre coordenadas polares y el truco de Feynman confirma la normalización de la gaussiana por vías complementarias: la primera aporta un fundamento geométrico, la segunda una herramienta paramétrica elegante y eficiente para estudiar dependencias. Utilizando μ como parámetro y justificando el intercambio por el Teorema de la Convergencia Dominada, se obtiene directamente que la integral es constante en μ=0, lo que subraya la utilidad pedagógica y práctica del método. La dualidad demostrativa presenta valor educativo significativo por un lado el método clásico desarrolla intuición geométrica y habilidades en cambio de variables. El método Feynman fomenta pensamiento lateral y aplicación creativa de herramientas de cálculo. La coexistencia de ambos enfoques enriquece la comprensión de la naturaleza del teorema.

7. Referencias

[1] J. M. Sánchez Muñoz y P. Sempere Valdés, "La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral", Lecturas Matemáticas, vol. 43, no. 1, pp. 5-22, 2022.

[2] E. Ariza García et al., "La Fórmula de Leibniz y el Truco Favorito de Feynman", Mixba'al, Revista Metropolitana de Matemáticas, vol. 15, no. 1, pp. 73-94, 2024.

[3] Flanders, Harley (1973). «Differentiation Under the Integral Sign». American Mathematical Monthly, 80(6), jun-jul 1973, pp. 615-627. https://doi.org/10.2307/2319163.

[4] Talvila, Erik (2001). «Necessary and Sufficient Conditions for Differentiating under the Integral Sign». American Mathematical Monthly, 108(6), jun-jul 2001, pp. 544- 548. https://arxiv.org/pdf/math/0101012

[5] "Artificio de Feynman para integrales", Demostración Py, dic. 2020. [En línea]. Disponible: https://demostracionpy.wordpress.com/2020/12/15/artificio-de-feynman-para-integrales/

[6] "Feynman's Trick", Zackyzz.github.io. [En línea]. Disponible: https://zackyzz.github.io/feynman.html